

PLACAS DELGADAS APOIADAS NO CONTORNO EM VIGAS DEFORMÁVEIS

Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho

Prof. Adjunto DECiv/UFSCar - São Carlos - SP

Danielle Lobato Fernandes

Aluna Engenharia Civil - UFSCar

Bolsista de Iniciação Científica - FAPESP

RESUMO

No cálculo dos esforços e deslocamentos nos elementos de pavimentos de edifício de concreto armado, admite-se que a flexibilidade das vigas de apoio não influi nos esforços atuantes. Dessa forma, várias hipóteses simplificadoras são usualmente empregadas: as placas são constituídas de material elástico-linear e têm pequenos deslocamentos; a rotação do contorno da placa ou é livre ou totalmente impedida; as ações da placa nas vigas são uniformemente distribuídas etc.

A maior parte dessas hipóteses possibilitam subdividir o pavimento nos seus elementos constituintes, os quais têm soluções já conhecidas. O projeto assim executado certamente apresenta resultados distantes daqueles que se obteriam com um cálculo mais próximo do real.

Este trabalho compara o comportamento de pavimentos de edifícios admitindo lajes e vigas trabalhando integradas, através do processo de analogia de grelhas, com procedimentos usuais. São abordados:

- a) cálculo de momentos em placas apoiadas em vigas deformáveis variando a inércia das vigas de contorno, para uma mesma placa, de maneira a representar desde situações próximas de apoio indeslocável até aquelas próximas de laje sem vigas;
- b) a distribuição das ações das lajes nas vigas a partir do cálculo integrado do pavimento e levando em conta a flexibilidade das vigas de apoio.

1. INTRODUÇÃO

O cálculo dos esforços e deslocamentos de um pavimento de edifícios de concreto armado, sistema estrutural composto de lajes e vigas, classicamente é feito através da análise individual de cada um dos elementos, admitindo-se que a flexibilidade das vigas de apoio não influi nos esforços atuantes nesses elementos, pois se esta for considerada o cálculo apresentará maiores dificuldades. Por essa razão, usualmente são feitas diversas simplificações nos projetos estruturais, sendo que as principais hipóteses que são empregadas são:

- o material é homogêneo com comportamento linear e isótropo;
- a espessura é constante e pequena em relação às demais dimensões;
- a rotação dos contornos das placas ou é livre (apoio simples) ou totalmente impedida (engastada);
- admite-se que as ações da placa nas vigas são uniformemente distribuídas e determinadas a partir da área de influência de cada uma e do tipo de ligação entre placa e viga;
- não há distribuição de forças diretamente para o pilar, ou seja, para chegarem ao pilar as forças devem passar pelas vigas;
- para o cálculo das placas consideram-se as vigas, no seu contorno, indeslocáveis na direção vertical, não se considerando a flexibilidade das mesmas.

Parece claro que o projeto executado a partir dessas hipóteses deve apresentar resultados distantes daqueles que se obteria com um cálculo mais próximo do real. Com relação às reações das lajes nas vigas pouco tem sido estudado, as situações quando tratadas não são muitas e, principalmente, não têm sido considerada a flexibilidade das vigas de apoio. Dentre os poucos autores que abordaram o assunto, serão relacionados apenas alguns mais significativos.

Um dos que têm estudado esse problema mais sistematicamente é MAZZILLI [1988, 1995]; dentre suas conclusões mais significativas, para lajes em regime elástico, podem ser relacionadas:

- na maioria dos casos é possível a separação entre lajes e vigas para a determinação dos esforços;
- os esforços nas lajes e nas vigas de apoio variam muito em função da flexibilidade das vigas;
- com cargas uniformemente distribuídas, os esforços nas vigas, calculados por processos usuais são muito diferentes daqueles obtidos pelo método dos elementos finitos;
- a rigidez das vigas pode afetar significativamente a distribuição de cargas nos pilares;
- não se pode admitir a laje sobre apoios indeslocáveis quando ela é excessivamente rígida em relação às vigas de apoio.

CARBONARI et alii [1990] ao elaborarem o projeto estrutural do Hospital das Clínicas da Universidade Estadual de Londrina, composto basicamente de lajes quadradas apoiadas em vigas, estudaram a reação das lajes nas vigas. O sistema laje-vigas foi discretizado e processado por um programa de elementos finitos, considerando a flexibilidade das vigas; a estrutura também foi calculada por processo convencional, admitindo-se as lajes isoladas com contornos rígidos e que as reações sobre as vigas do contorno se davam segundo cargas uniformemente distribuídas, de acordo com os quinhões de carga propostos pela NBR-6118. Notou-se uma significativa diferença entre os esforços obtidos nas vigas pelos dois processos, principalmente com relação aos momentos fletores, sendo menores os valores calculados com o processo convencional.

Também CARVALHO [1994] estudou a reação das lajes nas vigas periféricas em alguns exemplos, comparando o cálculo usual, com as lajes e vigas trabalhando isoladamente, e o pavimento calculado pelo método da analogia de grelhas, considerando nestes casos a influência da fissuração nas lajes e nas vigas. Pode-se resumir algumas conclusões:

- considerar a ação da laje nas vigas como uma carga uniformemente distribuída, conforme a NBR 6118, para cargas de serviço pode levar a valores de momentos nas vigas abaixo dos reais;
- os esforços nas vigas são função da sua rigidez, principalmente no estágio I, porém quando se considera a fissuração, nos exemplos analisados, o momento fletor na viga resulta bem maior que o obtido pelo processo usual;
- somente vigas com baixa rigidez em comparação com a laje é que podem, no estágio I, receber um carregamento próximo do uniformemente distribuído; mesmo nesses casos, quando se considera a fissuração, a forma do carregamento na viga é bem diferente.

2. OBJETIVOS

Neste trabalho estuda-se o comportamento de pavimentos de edifícios com as lajes e vigas trabalhando integradas, procurando avançar em relação às pesquisas de Mazzilli e Carvalho com novos exemplos, os quais serão analisados através do processo de analogia de grelhas, comparando com procedimentos usuais. Especificamente, serão abordados dois aspectos principais:

- a) cálculo de momentos em placas apoiadas em vigas deformáveis no contorno, com variação da inércia das vigas, com alturas desde valores altos (situação próxima de apoio indeslocável) até um valor próximo ao da espessura da placa (situação tendendo para laje sem vigas);
- b) verificar, a partir do cálculo integrado do pavimento com a conseqüente flexibilidade das vigas de apoio, como são distribuídas as ações das lajes nas vigas.

3. MÉTODOS DE CÁLCULO EMPREGADOS

No cálculo dos pavimentos serão empregadas as tabelas de BARES [1972] para o cálculo usual e o método de analogia de grelhas para o cálculo do pavimento integradamente.

3.1. Cálculo usual ou clássico

O cálculo clássico de esforços e deslocamentos em uma placa é fundamentado na teoria da elasticidade que, para ser aplicada, necessita que sejam feitas algumas hipóteses: a placa é constituída de material elástico; a espessura da placa é pequena; os deslocamentos verticais são pequenos em relação à espessura; os deslocamentos horizontais dos pontos do plano médio são desprezíveis; as retas normais ao plano médio mantêm-se normais à superfície média da placa deformada; os apoios em todo o contorno da placa são indeslocáveis.

Neste estudo a determinação dos esforços pelo método clássico utiliza o processo de resolução por séries, baseado nas soluções apresentadas por Bares, por meio de tabelas devidamente adaptadas para o coeficiente de Poisson igual a 0,2.

3.2. Método da analogia de grelhas

A analogia de grelhas consiste na representação de placas e vigas substituindo-se a estrutura por uma malha equivalente de vigas com as mesmas características. Neste processo, que trata o pavimento de maneira integrada, não são necessárias tantas simplificações quantas no método clássico: permite considerar, na capacidade de rotação de uma laje, a rigidez das vizinhas; as vigas podem ser consideradas como elementos deformáveis; possibilita modelar mais adequadamente a interação entre as lajes e as vigas; permite aplicar nas lajes cargas não uniformemente distribuídas.

A idéia de se interpretar uma laje através de uma grelha equivalente teve início com Marcus em 1932, conforme citado em CARVALHO [1994], que utilizava processos aproximados para

resolver as grelhas. Em 1959, LIGHTFOOT & SAWKO [1959] retomaram a analogia de grelhas no estudo de pavimentos, agora dispondo de programas de computadores, e posteriormente a aplicação do método foi sistematizada por HAMBLY [1976]. Aqui utiliza-se programa GPLAN que foi desenvolvido no Departamento de Estruturas da EESC-USP. As técnicas para a adoção de uma grelha equivalente e as características geométricas e elásticas dos elementos podem ser encontradas em HAMBLY [1976], e citadas em FIGUEIREDO FILHO [1989] e CARVALHO [1994].

4. PAVIMENTOS ANALISADOS

No estudo foram analisados pavimentos com painéis quadrados (PQ), retangulares isolados (PR) e compostos de dois painéis, também quadrados (P2Q), todos com rotação livre nos apoios das lajes; os pavimentos com painéis isolados serão apoiados em pilares nos quatro cantos, e os com dois painéis terão apoio em pilares nos quatro cantos e em seis pilares, posicionados no cruzamento de todas as vigas (figuras 1 a 4)). Para cada situação de pavimentos, as lajes serão consideradas inicialmente com apoios indeslocáveis e, em seguida, sem vigas, apoiadas em vigas de pequena altura (30 cm) e em vigas de grande altura (200 cm), na verdade quase uma parede. Todas as vigas têm largura de 12 cm e todas as lajes têm espessura de 8,0 cm.

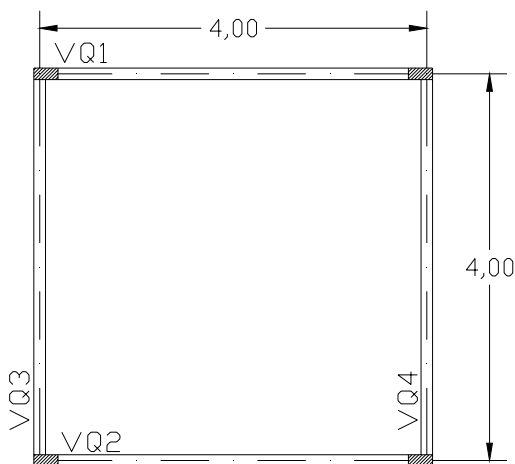


FIGURA 1. Pavimentos (PQ) com painel isolado quadrado (4m X 4m)



FIGURA 2. Pavimentos (PR) com painel isolado retangular (4m X 8m)

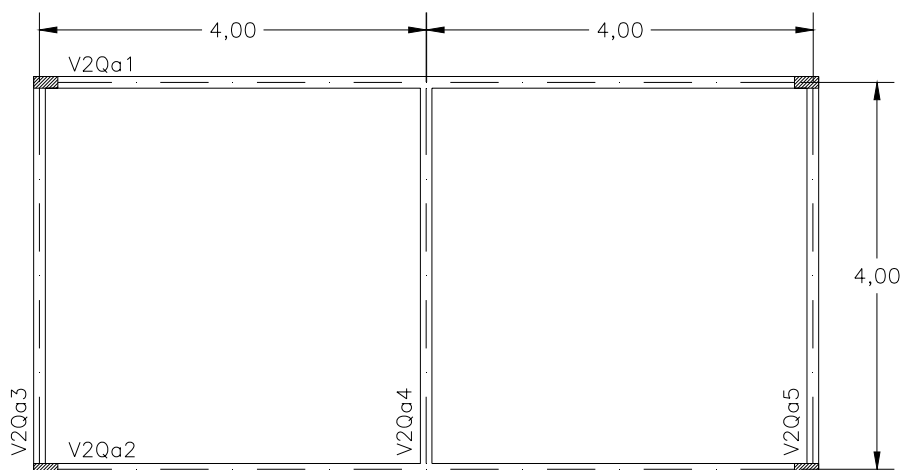


FIGURA 3. Pavimentos (P2Q) com dois painéis quadrados (4m X 4m) apoiados em 4 pilares

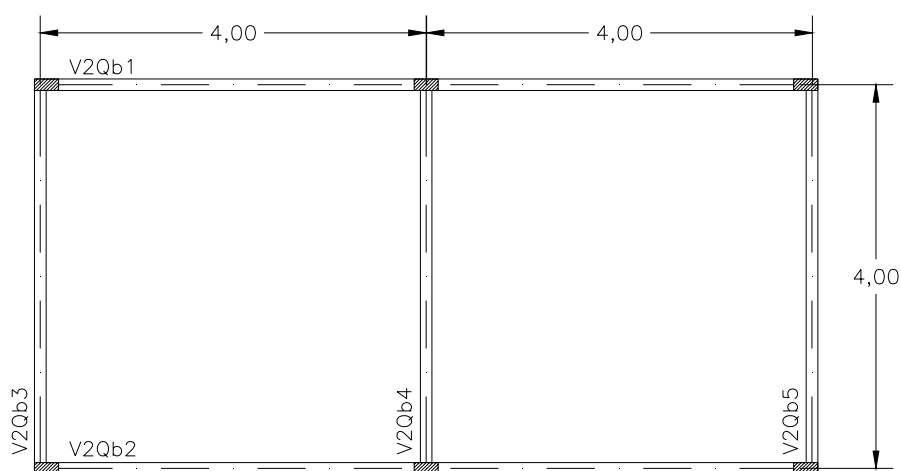


FIGURA 4. Pavimentos (P2Q) com dois painéis quadrados (4m X 4m) apoiados em 6 pilares

5. CARREGAMENTO NOS PAVIMENTOS

O carregamento adotado para as lajes é $p = 5 \text{ kN/m}^2$, admitindo-se a seguinte composição:

g_1 - carga permanente principal = $0,08 \times 5 = 2,0 \text{ kN/m}^2$

g_2 - carga permanente secundária (revestimentos, etc.) = $1,0 \text{ kN/m}^2$

q - carga acidental = $2,0 \text{ kN/m}^2$

6. RESULTADOS

6.1. Resultados dos momentos nas lajes

Apresenta-se os máximos momentos positivos nas duas direções (x e y) e os momentos junto às vigas centrais nos pavimentos com dois painéis; esse momentos podem ser positivos ou negativos.

6.1.1. Resultados dos momentos calculados pelo método de analogia de grelhas

Para a obtenção da grelha equivalente, as lajes foram divididas em elementos de largura de 0,5 m, tanto na direção x quanto na direção y. Na tabela 1 estão os resultados, em kNm/m.

TABELA 1. Momentos fletores máximos (kNm/m) obtidos com analogia de grelhas

PAVTO	DIMENSÕES	APOIO	VIGAS	MOMENTOS POSITIVOS		M _x JUNTO À VIGA CENTRAL
				direção x	direção y	
PQ1	4m X 4m	contorno	qualquer	3,364	3,364	—
PQ2	4m X 4m	4 pilares	sem	8,000	8,000	—
PQ3	4m X 4m	4 pilares	30 cm	4,014	4,014	—
PQ4	4m X 4m	4 pilares	200 cm	3,608	3,608	—
PR1	4m X 8m	contorno	qualquer	2,215	8,300	—
PR2	4m X 8m	4 pilares	sem	38,846	10,552	—
PR3	4m X 8m	4 pilares	30 cm	7,850	7,352	—
PR4	4m X 8m	4 pilares	200 cm	2,430	8,584	—
P2Q1	2 (4mX4m)	contorno	qualquer	3,093	2,206	- 6,948
P2Q2	2 (4mX4m)	4 pilares	sem	38,846	10,552	—
P2Q3	2 (4mX4m)	4 pilares	30 cm	7,401	3,526	1,497
P2Q4	2 (4mX4m)	4 pilares	200 cm	3,293	2,282	-3,561
P2Q5	2 (4mX4m)	6 pilares	sem	3,909	12,928	-2,812
P2Q6	2 (4mX4m)	6 pilares	30 cm	3,015	3,698	-5,128
P2Q7	2 (4mX4m)	6 pilares	200 cm	3,276	2,282	-7,168

6.1.2 Valores obtidos pelo método clássico

Como já dito, no cálculo clássico admite-se que os apoios em todo o contorno da placa são ind deslocáveis, e aqui foi utilizado o processo de resolução por séries, baseado nas soluções de Bares.

TABELA 2. Momentos fletores obtidos pelo método clássico

TIPO DE PAVIMENTO	MOMENTOS POSITIVOS		MOMENTOS NEGATIVOS (kNm/m)
	direção x (kNm/m)	direção y (kNm/m)	
PQ1, PQ2, PQ3, PQ4	3,528	3,528	—
PR1, PR2, PR3, PR4	2,920	8,000	—
P2Q1, P2Q2, P2Q3, P2Q4	3,152	2,328	6,816
P2Q5, P2Q6, P2Q7	3,152	2,328	6,816

6.2. Resultados das reações das lajes nas vigas de contorno dos painéis

Como os valores das reações das lajes nas vigas, calculadas por analogia de grelhas não são uniformes, fica difícil apresentar essas cargas, tanto em tabelas como em desenhos; dessa forma, são mais significativos os momentos fletores, resultantes dos carregamentos. Esses resultados estão na tabela 3, para os dois métodos de cálculo. A denominação das vigas se encontra nas figuras 1 a 4, e a dos pavimentos é a mesma da tabela 2.

6.2.1. Processo da NBR-6118

Segundo a NBR-6118, item 3.3.2.9, as reações de lajes retangulares com carregamento uniformemente distribuído, nas vigas de apoio, podem ser admitidas como uniformes em toda a viga, considerando-se para cada apoio carga correspondente aos triângulos ou trapézios obtidos traçando-se, a partir dos vértices, na planta da laje, retas inclinadas, com ângulos variando conforme as condições de apoio. Os momentos fletores (tabela 3) foram determinados a partir das cargas nas vigas conforme a NBR-6118, para as diversas situações.

6.2.2. Analogia de grelhas

Os resultados (tabela 3) foram obtidos utilizando o programa computacional GPLAN. Para todos os pavimentos foi empregada uma malha com espaçamento de 50 cm; os valores referem-se ao maior encontrado entre os pavimentos que apresentam o mesmo momento pelo cálculo usual. As reações das lajes nas vigas não são uniformes; como exemplo, nas figuras 5 e 6 estão as reações, em kN, nas vigas do pavimento PR3 (apoiado nos 4 cantos e com vigas de 30 cm de altura no contorno).

TABELA 3. Momentos fletores máximos nas vigas de apoio das lajes

PAVIMENTO	VIGA	MOMENTOS FLETORES MÁXIMOS (kNm)			
		MOMENTOS POSITIVOS		MOMENTOS NEGATIVOS	
		NBR-6118	GRELHA	NBR-6118	GRELHA
PQ1, PQ3, PQ4	VQ1	10,00	15,421	—	—
PR1, PR3, PR4	VR1	60,00	78,151	—	—
	VR3	10,00	18,073	—	—
P2Q1, P2Q3, P2Q4	V2Qa1	93,60	89,262	—	—
	V2Qa3	11,00	16,615	—	—
	V2Qa4	32,16	41,536	—	—
P2Q6, P2Q7	V2Qb1	4,10	7,350	7,32	11,796
	V2Qb3	11,00	13,870	—	—
	V2Qb4	32,16	41,645	—	—

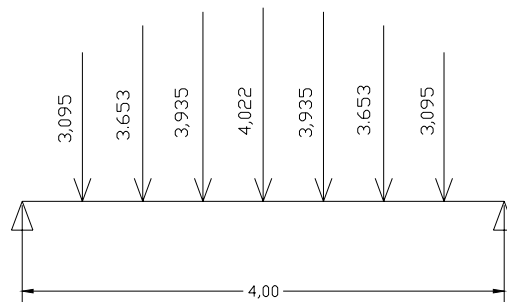


FIGURA 5. Reações, em kN, na viga VR3 do pavimento PR3

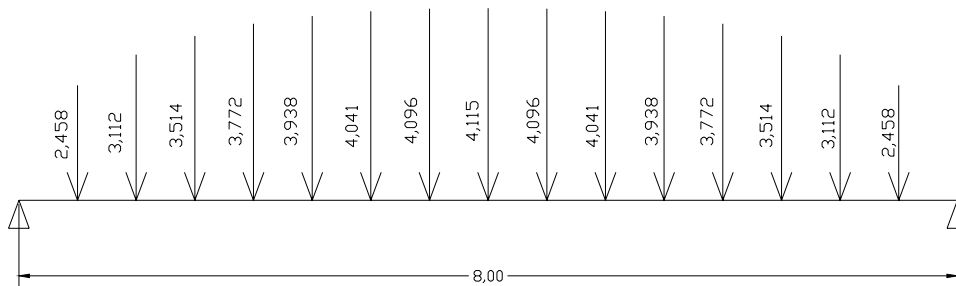


FIGURA 6. Reações, em kN, na viga VR1 do pavimento PR3

7. CONCLUSÕES

7.1. Momentos nas lajes

A partir dos resultados encontrados para os momentos nas lajes, o estudo permitiu observar inicialmente que:

- os momentos positivos calculados pelo método clássico são bastante próximos, na maioria um pouco maiores, do que aqueles obtidos pela analogia de grelha considerando que os apoios das lajes sejam indeslocáveis verticalmente;
- os momentos negativos, no caso do pavimento apoiado em todo o contorno é praticamente o mesmo para os dois métodos;
- nas situações em que o pavimento se apoia em quatro pilares, no método clássico o valor é o mesmo anterior, mas com vigas deslocáveis de 30 cm o momento é inclusive positivo, e nas vigas com 200 cm, que se aproxima do caso indeslocável, o momento é negativo e em torno da metade do caso clássico;
- nos casos de apoio do pavimento em 6 pilares e vigas de 30 cm, o momento negativo obtido com a analogia de grelhas é maior que o observado no caso de apoio em quatro pilares, mas ainda menor que o do método clássico, e com vigas de 200 cm, o momento é pouco maior que o do cálculo clássico;
- nas lajes sem vigas, os momentos são bem maiores, pois não existem apoios no contorno; esses valores não podem ser comparados com o método clássico, que não se aplica a esse tipo de laje;

f) nos pavimentos onde os vãos maiores são de 8 m e com vigas de 200 cm, os momentos são próximos dos obtidos com apoios indeslocáveis, calculados pela analogia de grelhas, e aqueles do caso clássico.

Em resumo, pode-se afirmar que os momentos nas lajes, considerando a flexibilidade das vigas, são geralmente maiores que os obtidos no cálculo clássico, chegando mesmo a valores maiores que o dobro (7,850 kNm/m em lajes com 4 apoios e vigas de 30 cm, e 3,152 kNm/m na situação indeslocável). É portanto importante, principalmente em lajes apoiadas em vigas de pequena rigidez, que o cálculo seja mais preciso; embora tenham sido analisadas apenas duas dimensões de painéis, o estudo parece indicar que para vãos muito diferentes entre si, a influência da flexibilidade das vigas é maior.

7.2. Reações das lajes nas vigas

A simplificação permitida pela NBR-6118, de considerar que as lajes aplicam às vigas carregamentos uniformemente distribuídos, é bastante simplista, como atestam os resultados encontrados. Os momentos fletores máximos, positivos e negativos, são significativamente maiores quando calculados a partir de uma distribuição de cargas mais próxima da realidade. Apenas no caso de pavimentos com dois painéis e apoiado em todo o contorno é que o cálculo segundo a NBR-6118 resultou em valor maior. O cálculo integrado, quando o pavimento é analisado como um todo deve ser, principalmente em obras de maior responsabilidade, preferencialmente empregado.

AGRADECIMENTO

Este estudo, que é parte de um projeto maior, em que novos casos e métodos de cálculo serão analisados, tem o apoio da FAPESP.

BIBLIOGRAFIA

- BARES, R. (1972). *Tablas para el calculo de placas y vigas parede*. Editorial Gustavo Gilli S/A. Barcelona.
- CARBONARI, G. et alii. (1990). *Estudo da distribuição de reações de apoio de lajes retangulares*. In: Anais do II Simpósio EPUSP Sobre Estruturas de Concreto. São Paulo. Vol. 2, p. 501-513.
- CARVALHO, R. C. (1994). *Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. Tese de Doutorado. EESC-USP. São Carlos, SP.
- FIGUEIREDO FILHO, J. R. (1989). *Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução*. Tese de Doutorado. EESC-USP. São Carlos, SP.
- HAHN, V. (1996). *Vigas continuas, pórticos y placas*. Editorial Gustavo Gili S.A. Barcelona.
- HAMBLY, E. C. (1976). *Bridge deck behaviour*. Chapman and Hall. London. 272p.
- LIGHTFOOT, E. & SAWKO, F. (1959). *Structural frame analysis by electronic computer: grid frameworks resolved by generalised slop deflection*. Engineering, nº 187, p. 18-20.
- MAZZILLI, A. R. P. (1995). *Influência das vigas e das lajes nos esforços das estruturas de concreto armado*. Tese de Doutorado. Escola Politécnica - USP. São Paulo.
- MAZZILLI, A. R. P. (1988). *Influência da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios*. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica - USP. São Paulo.
- NBR 6118/80. (1980). *Projeto e execução de obras de Concreto Armado*. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro. 76p.